SVD: $A = Q\cdot D\cdot P^T$ $\quad m\times n$

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ \hline & 0 & \end{bmatrix} \qquad m\geq n$$

$Q\in O(m)$, $P\in O(n)$

低秩逼近

$$A_r = Q\cdot\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\cdot P^T \qquad m\times n.$$

$\mathrm{rk}\, A_r \leq r$

$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$

$\Downarrow$

$\mathrm{rk}\, A_r = r$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{Q\text{的前}r\text{列}} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

P^T的前r行.

定理: $\|A-A_r\|_F \leq \|A-B\|_F$

$\mathrm{rk}\, B\leq r$

几何上

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}$$

通常 $(m \gg n)$

$\alpha_i \in \mathbb{R}^n$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$$

$\beta_i \in \mathbb{R}^n$.

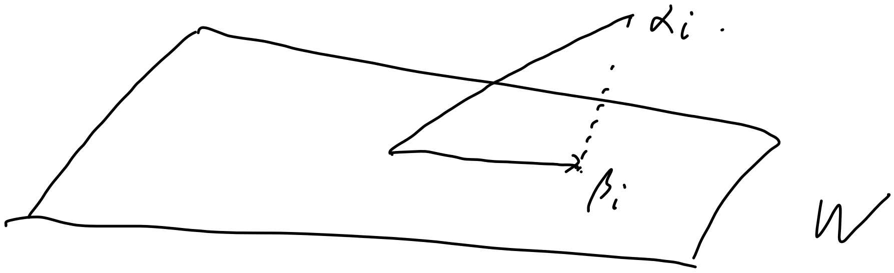
$$\|A - B\|_F^2 = |\alpha_1 - \beta_1|^2 + |\alpha_2 - \beta_2|^2 + \cdots + |\alpha_m - \beta_m|^2$$

$\operatorname{rk} B = r$ $\dim \operatorname{span}(\beta_1 \cdots \beta_m) = r$

先固定某个 dim r 的子空间 W.

找 $\beta_1 \cdots \beta_m \in W$

固定 W. i $\underset{\beta_i \in W}{\text{minimize}} \; |\alpha_i - \beta_i|^2$



(最小二乘法). $W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^n$

$\alpha = \beta + \beta'$. $\beta \in W$, $\beta' \in W^{\perp}$.

$\beta' \perp W$.

β 记作 $\mathrm{Proj}_W \alpha$.

固定 B 的行空间 W.

$\|A - B\|^2$ 最小当且仅当

$$\boxed{\beta_i = \mathrm{Proj}_W \alpha_i}$$

$$A_r = \boxed{Q \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{pmatrix}$$

$$A = \boxed{Q \cdot D} \cdot \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

QD 的 i 行 $=$ α_i 在 $v_1 \cdots v_n$ 下的坐标,

$$Q\cdot\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$ 的 i 行 $=$ 坐标的前 r 个分量.

$\|A-A_r\|_F^2$ 在 $rk \le r$ 的矩阵中最小,

$W = span(v_1 \cdots v_r)$ minimize $\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \text{ 到 } W \text{ 距离平方}\right)$ 在 $dim=r$ 的 subspace 中.

假设任一般 $dim=r$ 的子空间 W.

取 $$B = \begin{pmatrix}(Proj_W \alpha_1)^T \\ (Proj_W \alpha_2)^T \\ \vdots \\ (Proj_W \alpha_m)^T\end{pmatrix}$$

$$\|A-B\|_F^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \text{ 到 } W \text{ 距离平方}\right)$$

PCA

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \in \mathbb{R}^n$$

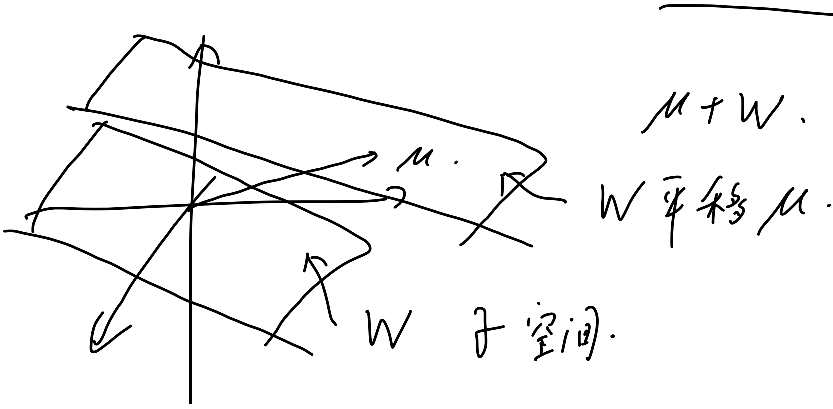
$$B = A - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mu^T$$

SVD of B $\quad B = Q \cdot D \cdot P^T$

$$B_r + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mu^T}$$

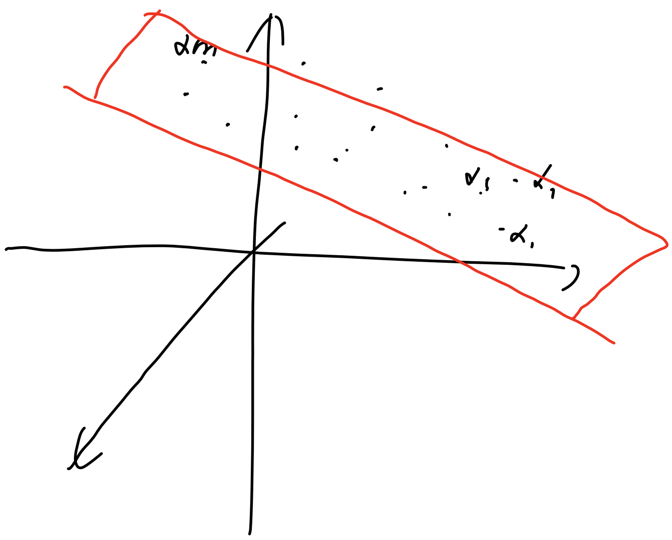
$$B_r = \underbrace{\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}}_{Q\text{前}r\text{列}} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{pmatrix}$$

$\mu + \mathrm{span}(v_1 \cdots v_r)$ 仿射子空间.



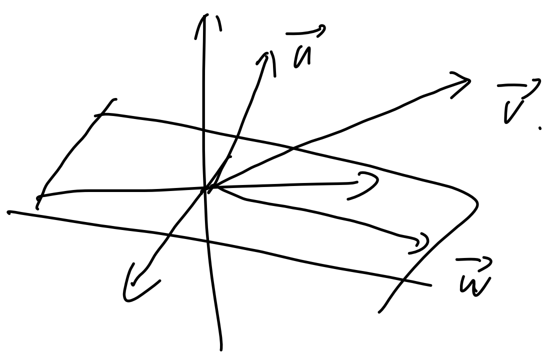
$$\left\| A - \left(B_r + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mu^T \right) \right\|_F^2$$

minimize $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ 到 r维仿射子空间的距离平方



固定 r 维子空间 W，平移 $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$

可以要求 $\vec{n} \in W^\perp$



$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$, $\vec{w} \in W$, $\vec{u} \in W^\perp$

$\vec{v} + W = \vec{u} + W$

$\sum_i \alpha_i$ 到 $\vec{n}+W$ 的距离平方

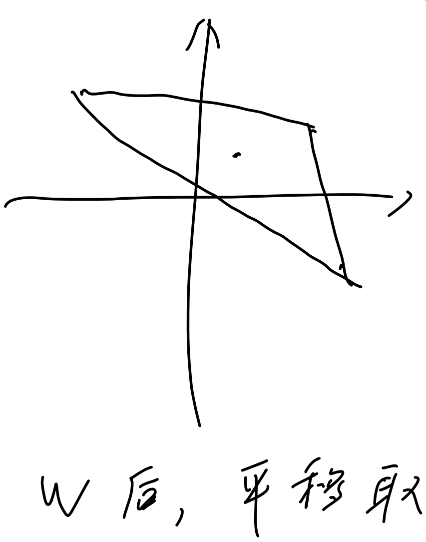
$$= \sum_i \left| \underline{\alpha_i - \vec{n}} - \underline{\mathrm{Proj}\,(\alpha_i - \vec{n})} \right|^2$$

$$= \sum_i \left| \underbrace{(\alpha_i - \mathrm{Proj}\,\alpha_i)}_{\text{记作 } \gamma_i} - \vec{n} \right|^2$$

<u>固定W.</u> <u>选 $\vec{n}$</u>

$\gamma_i \in W^{\perp}$, minimize

$$\sum_{i=1}^{m} |\gamma_i - \vec{n}|^2, \quad \vec{n} \in W^{\perp}.$$



<u>在 $\vec{n} = \frac{1}{m} \gamma_i$ 时取最小</u>

固定 W 后，平移取 $\boxed{\mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}$

与 W 无关

固定平移 μ，找 W.

$(x_i-\mu)$ 找 W，使得

$\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)$ 到 W 距离平方

最小.

注意与最小二乘法区别

最小二乘法：固定 W，x.

minimize $|x-\beta|^2$.

$\beta \in W$.

低秩逼近：固定 $x_1 \dots x_m$.

SVD 找 W.

minimize $\sum_{i=1}^{m}(\mathrm{dist}(x_i, W))^2$

复习. FFT.

DFT DFT矩阵

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & & & \\ 1 & w^{n-1} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$w = e^{\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{n}}$$

$$DFT\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = W \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\overline{W}^T \cdot W = n. \quad \boxed{W^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \overline{W}^T}$$

$T: V \to V$ 线性变换. $A \in M_n(\mathbb{C})$

特征值: λ λ

特征向量: v: $T(v) = \lambda v$. $v \neq 0$ x: $A \cdot x = \lambda x$ $x \neq 0$

取基 β. $[T]_\beta^\beta = A$, $\longrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

特征多项式 $|\lambda I - A| = \lambda^n - Tr(A)\cdot\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot \det A$.

特征值 λ_i: $|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

求解: $(\lambda I - A)\cdot x = 0$.

对 $T: V \to V$, 在基 B 下. $[T]_B^B = A$.

$x \longrightarrow$ 特征向量 v 在 B 下的 $[v]_B$.

T 对角化: ① V 有一组特征向量组成的基.

② 相等 $\begin{cases} \dim\ker(\lambda_i I - A) = \lambda_i \text{ 几何重数} \\ \lambda_i \text{ 在 } |\lambda I - A| \text{ 的重数} = \lambda_i \text{ 代数重数} \end{cases}$

(一般 几何重数 $\le$ 代数重数)

可算出, $P = (v_1 \cdots v_n)$

$P^{-1}AP$ 对角.

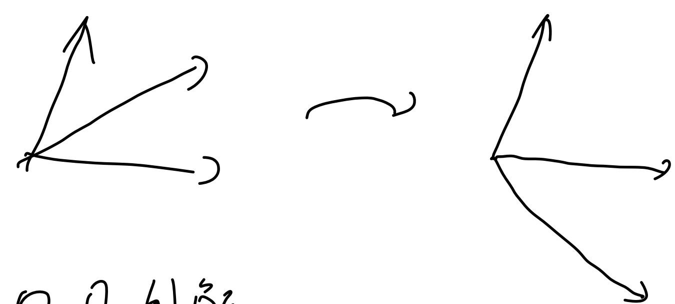
③ 极小多项式 (化零多项式中 deg 最小 首一) 无重根

$A\cdot(v_1 \cdots v_n) = (v_1 \cdots v_n)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

例: $A^2 = I$, $\lambda^2 - 1$ 化零, 无重根 $\Rightarrow A$ 可对角化.

$\boxed{\mathbb{R}}$ 内积空间: $\mathbb{R}^n$, $\langle\, ,\, \rangle$

Gram-schmidt 正交化

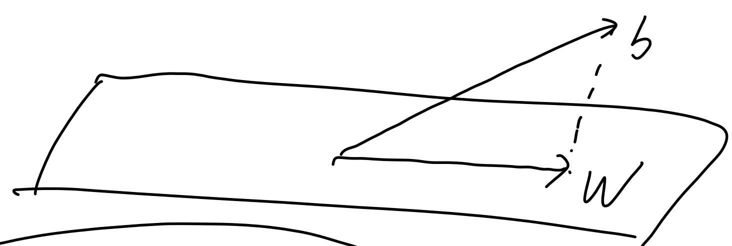


QR分解: $A = QR$

最小二乘法

$\boxed{Ax = b}$ 不一定有解.

找出 x, $|Ax - b|$ 最小



A 列空间 W

$W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^n$

几何上. W 的标准正交基. $v_1 \cdots v_r$

$$\mathrm{Proj}_W b = \sum_{i=1}^{r} \langle b, v_i \rangle v_i$$

$$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = Q \cdot \left(\begin{array}{cc} \ddots & * \\ 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right)$$

$$= Q \cdot \left(\begin{array}{c} R_1 \\ \hline 0 \end{array}\right) \qquad R_1 \text{ 上三角.}$$

$$= \underbrace{(Q_1, Q_2)}_{\text{W 标准正交基.}} \cdot \left(\begin{array}{c} R_1 \\ \hline 0 \end{array}\right) = Q_1 \cdot R_1$$

$$|Ax-b|^2 = |Q \cdot Rx - b|^2$$

$$= |Rx - Q^T \cdot b|^2 \qquad \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix}$$

$$= \left| \left(\begin{array}{c} \ddots \\ \hline 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \underline{Q^T b} \right|^2$$

$$= \left| \left(\begin{array}{c} R_1 \cdot x \\ \hline 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} Q_1^T \cdot b \\ \hline Q_2^T b \end{array}\right) \right|^2$$

求解: $\boxed{R_1 x = Q_1^T b}$

V. 对称双线性型.

$B: V \times V \to \mathbb{R}$

取 V 的基 C: $v_1 \cdots v_n$.

Gram 矩阵 $(B(v_i, v_j))_{n\times n} = G_C$

$$B(v, w) = ([v]_C)^T \cdot G_C \cdot ([w]_C)$$

$\boxed{G_C \text{ 对称矩阵}}$

可取到 B 下正交的基. G_C 对角阵.

$$\begin{array}{l} p\text{个} \\ q\text{个} \\ r\text{个} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

假设 $B(v,v) \neq 0$
考虑 $W = \{w \mid B(v,w) = 0\}$

(p, q, r) 是 B 的符号.

正定，负定，半正定，半负定.

对称矩阵 $A=A^T$　　$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \mapsto Ax$

对 $\langle v, Aw\rangle = \langle Av, w\rangle$

A 可作正交对角化，$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$Q \in O(n)$. $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$Q^TAQ = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

$\lambda_i > 0 \iff$ 正定.

正.负.0 $\Rightarrow$ 符号.

正交矩阵. $A^TA = AA^T = I$

标准型

引理：W 是 A 不变，

$W^\perp$ 也是

dim=1. dim=2

$\mathbb{R}$ 上的 $T: V\to V$ 总有

dim ≤ 2 不变子空间.

SVD $A = QDP^T$

$P = (v_1 \cdots v_n)$ 是 A^TA 的特征向量.（A^TA 正交对角化）

A^TA 半正定.

$$P^TA^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_i \geq 0 \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_n.$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

$$\sigma_1 = \max_{\substack{v \neq 0 \\ v \in \mathbb{R}^n}} \frac{|A \cdot v|}{|v|}$$

对称矩阵 A. $\lambda_1 = \max\limits_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle}$